

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΟΙ ΟΡΙΣΜΟΙ ΤΟΥ ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ,
Η ΜΟΥΣΙΚΗ ΑΝΑΛΟΓΙΑ ΚΑΙ Ο ΙΑΜΒΛΙΧΟΣ

Ὁ Ἰάμβλιχος κατήγετο ἐκ τῆς Χαλκίδος τῆς Κοίλης Συρίας, ἦτο δηλ. Σύρος, ἤκμασε δὲ κατὰ τὸν 3—4 αἰ. μ. Χ. Ἐσπούδασεν εἰς τὴν Ἀλεξάνδρειαν, ὅπου εἶχε καθηγητὴν τὸν μαθηματικὸν καὶ φιλόσοφον Ἀνατόλιον, ὁ ὁποῖος κατὰ τὸ 269 ἔγινεν ἐπίσκοπος Λαοδικείας (τῆς Συρίας). Βραδύτερον ἔσχε καθηγητὴν εἰς τὴν Ῥώμην τὸν Πορφύριον καὶ ἀκολούθως ἵδρυσεν φιλοσοφικὴν Σχολὴν εἰς τὴν Ἀπάμειαν τῆς Συρίας. Ὑπῆρξε νεοπλατωνικὸς φιλόσοφος. Ἐγγράφη πολλὰ ἔργα, ἐκ τῶν ὁποίων ἐσώθησαν ὀλίγα. Μεταξὺ αὐτῶν καταλέγονται καὶ τὰ ἐξῆς :

1. Περὶ τοῦ Πυθαγορικοῦ βίου (L. Deubner, Λειψία 1937).
2. Περὶ τῆς Νικομάχου Ἀριθμητικῆς Εἰσαγωγῆς (H. Pistelli, Λειψία 1894).
3. Περὶ τῆς Κοινῆς Μαθηματικῆς Ἐπιστήμης (N. Festa, Λειψία 1891).
4. Θεολογούμενα τῆς Ἀριθμητικῆς (V. de Falco, Λειψία 1922).

Τὸ ὑπὸ τὸν τίτλον Προτρεπτικὸς εἰς ἀποσπάσματα διασωθὲν ἔργον προέρχεται ἐκ τοῦ Προτρεπτικοῦ τοῦ Ἀριστοτέλους, χωρὶς ὅμως ὁ Ἰάμβλιχος νὰ ἀναφέρῃ ὅτι τὸ ἔργον τοῦ αὐτοῦ προέρχεται ἐκ τοῦ ἀριστοτελικοῦ ἔργου¹. Ἀλλὰ καὶ εἰς τὴν πραγματείαν τοῦ Ἰαμβλίχου Περὶ τῆς Κοινῆς Μαθηματικῆς Ἐπιστήμης, δλόκληρον τὸ VI κεφάλαιον προέρχεται ἐκ τῶν διαλόγων τοῦ Πλάτωνος, χωρὶς ὁ Ἰάμβλιχος νὰ ἀναφέρῃ τοῦτο².

Ὁ Ἰάμβλιχος, φαίνεται, ὅτι εἶχεν ὑποστῆ τὴν ἐπίδρασιν διδασκαλιῶν τοῦ Χριστιανισμοῦ παρὰ τοῦ διδασκάλου τοῦ Ἀνατολίου, ὡς συνάγεται ἐκ τῆς πραγματείας Περὶ τοῦ Πυθαγορικοῦ βίου, ὅπου διαβάζομεν τὰ ἀκόλουθα : ἅπαντα μέντοι ὅσα περὶ τοῦ πράττειν ἢ μὴ πράττειν διορίζουσιν ἐστόχασται πρὸς τὸ θεῖον, καὶ ἀρχὴ αὕτη ἐστὶ, καὶ ὁ βίος ἅπας συντέτακται πρὸς τὸ ἀκολουθεῖν τῷ θεῷ καὶ ὁ λόγος αὐτὸς ταύτης ἐστὶ τῆς φιλοσοφίας³. Εἰς τὴν πραγματείαν τοῦ Περὶ τῆς Νικομάχου Ἀριθμητικῆς Εἰσαγωγῆς ὁ Ἰάμβλιχος ὁμιλεῖ περὶ θείας προνοίας⁴. Βυζαντινὸς δὲ σχολιαστὴς, ὁ ὁποῖος βέβαια ἦτο Χριστιανός, σχολιάζων τὴν προηγουμένην πραγματείαν τοῦ Ἰαμβλίχου λέγει : «τοῦτο αἰνιττόμενος ὁ θεὸς Ἰάμβλιχος εἶπεν ὅτι τοῦ ἡνωμένου ἐπ' ἀπειρόν ἐστιν ἡ τομὴ, ἐπεὶ καὶ πάντα τὰ ὄντα εἶτε νοητὰ εἶτε καὶ αἰσθητὰ κατὰ ἀριθμὸν ὑπὸ τοῦ δημιουργοῦ νοῦ καὶ τῆς ἀρρήτου τούτου σοφίας καὶ τοῦ παναγίου καὶ ζωοποιοῦ αὐτοῦ πνεύματος ἐκτίσθησαν⁵».

Εἰς τὴν αὐτὴν πραγματείαν τοῦ Περὶ τῆς Νικομάχου Ἀριθμητικῆς Εἰσαγωγῆς ὁ Ἰάμβλιχος ἔχει διασώσει σπουδαίας πληροφορίας διὰ τὴν θεωρίαν τῶν ἀριθμῶν τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων, τὰς ὁποίας δὲν ἀπαντῶμεν εἰς τὰ Στοιχεῖα τοῦ Εὐκλείδου, μεταξὺ τῶν ὁποίων ἀναφέρομεν τὸ Θυμαρίδειον Ἐπάνθημα⁶. Εἰς μερικὰ

1. Κ. Δ. Γεωργούλη, Ἀριστοτέλης ὁ Σταγίριτης, Θεσσαλονίκη 1962, σ. 76.

2. Ἐπινομίς 991 B - D, 986 C - D. Πολιτεία 537 C - D, 527 D - E, 521 C - D, 523 A, 532 D κλπ. (Festa σ. 6, 20 — 27 ἕπος.).

3. Περὶ Πυθ. βίου 86—88 καὶ τὸ αὐτὸ 137—138, Deubner σελ. 50, 17 καὶ 77, 16.

4. Iamblichus in Nicomachi Arithm. Introd. H. Pistelli, Lipsiae 1894.

5. Pistelli 126 — 127.

6. Ε. Σ. Σταμάτη, Ἱστορία τῶν Ἑλληνικῶν Μαθηματικῶν, Ἀθήναι 1976, σελ. 84. Pistelli 62, 18.

ὅμως σημειᾶ τῶν συγγραφῶν του ὁ Ἰάμβλιχος παρουσιάζεται ἀνακριβῆς καὶ τὰ σχόλιά του εἶναι ἐσφαλμένα. Ἡ Eva Sachs ὀνομάζει αὐτὸν ἀναξιόπιστον καὶ ἀναληθῆ 7.

Μνημονεύομεν ἀμέσως κατωτέρω σχόλια τοῦ Ἰαμβλίχου εἰς τινας ὀρισμοὺς τῶν ἀριθμητικῶν βιβλίων τοῦ Εὐκλείδου :

«Τοῦ γὰρ ἀρτίου καθ' ὑποδιαίρεσιν τὸ μὲν ἐστὶν ἀρτιάκις ἄρτιον, τὸ δ' ἀντίζυγον τούτῳ ἀρτιοπέρισσον, ὡσανεὶ ἀκρότητες· μέσον δ' αὐτῶν καὶ οἶον κοινὸν ἀμφοτέρων περισσάρτιον. ὕπερ ἀγνοοῦντες οἱ περὶ τὸν Εὐκλείδην συγκεχυμένως τὸν αὐτὸν οἴονται περισσάρτιόν τε καὶ ἀρτιοπέρισσον εἶναι ὥστε καὶ ἐνθάδε ἡμαρτημένως πάλιν Εὐκλείδης ἀφορίζειται λέγων· «ἀρτιάκις ἄρτιος ἀριθμὸς ἐστὶν ὁ ὑπ' ἀρτίου μετρούμενος ἀρτιάκις». . . . Ἐπειδὴ δὲ ἐνταῦθα προδηλότερον ἀμάρτημα παρὰ τῷ Εὐκλείδῃ ἐστὶ τὸ μὴ διακρίνειν ἀρτιοπέρισσον περισσάρτιον. . . . λέγει γὰρ οὕτως : «ἀρτιοπέρισσος ἀριθμὸς ἐστὶν ὁ ὑπ' ἀρτίου ἀριθμοῦ μετρούμενος περισσάκις». ὁ δὲ αὐτὸς καὶ περισσάρτιός ἐστι· καὶ γὰρ ὑπὸ περισσοῦ ἀριθμοῦ μετρεῖται ἀρτιάκις, οἶον λόγου χάριν ὁ ζ'· ἐὰν μὲν γὰρ δις τρία λέγομεν, ἀρτιοπέρισσος, ἐὰν δὲ τρίς δύο περισσάρτιος· πᾶνυ εὐήθως. Ἀλλὰ καὶ ἐν τῷ τρίτῳ τῶν ἀριθμητικῶν τοὺς τρεῖς εἰς ἓνα συγγέει, δουλεύων δηλονότι τῇ τοῦ ὀνόματος ἐμφάσει 8».

Ἐρμηνεία : «Διότι κατὰ τὴν ὑποδιαίρεσιν τοῦ ἀρτίου τὸ μὲν εἶναι ἀρτιάκις ἄρτιον, τὸ ἀντίστοιχον δὲ τούτου εἶναι ἀρτιοπέρισσον, ὡς ἐὰν εἶναι ἀκρότητες. μέσον δὲ αὐτῶν καὶ ὡς κοινὸν καὶ τῶν δύο εἶναι τὸ περισσάρτιον. Τὸ ὁποῖον ἀγνοοῦντες οἱ περὶ τὸν Εὐκλείδην νομίζουν ὅτι εἶναι ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς περισσάρτιος καὶ ἀρτιοπέρισσος ὥστε καὶ ἐδῶ ἐσφαλμένως πάλιν ὁ Εὐκλείδης ἀποφαίνεται εἰς τοὺς ὀρισμοὺς λέγων· ἀρτιάκις ἄρτιος ἀριθμὸς εἶναι ὁ ὑπὸ ἀρτίου ἀριθμοῦ μετρούμενος ἀρτιάκις. . . . Ἐπειδὴ δὲ ἐδῶ τὸ σφάλμα τοῦ Εὐκλείδου εἶναι φανερώτερον, τὸ νὰ μὴ διακρίνη δηλαδὴ τὸν ἀρτιοπέρισσον τοῦ περισσάρτιου. . . . διότι λέγει τὰ ἐξῆς : ἀρτιοπέρισσος ἀριθμὸς εἶναι ὁ ὑπὸ ἀρτίου ἀριθμοῦ μετρούμενος περισσάκις. Ὁ αὐτὸς δὲ ἀριθμὸς εἶναι καὶ περισσάρτιος· διότι καὶ ὑπὸ περιττοῦ ἀριθμοῦ μετρεῖται ἀρτιάκις, ὅπως λόγου χάριν ὁ β'· διότι ἐὰν μὲν λέγωμεν δύο ἐπὶ τρία εἶναι ἀρτιοπέρισσος, ἐὰν δὲ τρία ἐπὶ δύο εἶναι περισσάρτιος· πάρα πολὺ ἀνοήτως. Ἀλλὰ καὶ εἰς τὸ τρίτον τῶν Ἀριθμητικῶν συγγέει ὁ Εὐκλείδης τοὺς τρεῖς ἀριθμοὺς εἰς ἓνα, χρησιμοποιοῦν δηλονότι τὴν ἐμφασιν τοῦ ὀνόματος».

Θεωρεῖται πολὺ τολμηρόν, ὅτι ὁ Ἰάμβλιχος ὀνομάζει τὸν Εὐκλείδην ἀνόητον.

Διὰ νὰ γίνῃ φανερὰ ἡ πλάνη τοῦ Ἰαμβλίχου παραθέτομεν τοὺς συναφεῖς ὀρισμοὺς τῶν Ἀριθμητικῶν τοῦ Εὐκλείδου, ὡς καὶ τὰ δύο θεωρήματα τοῦ τρίτου βιβλίου τῶν Ἀριθμητικῶν, δηλαδὴ τοῦ ἐνάτου βιβλίου τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου, τὰ ὁποῖα ὑπαινίσσεται ὁ Ἰάμβλιχος.

ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ βιβλίον 7.

Ὅρισμὸς 8. «Ἀρτιάκις ἄρτιος ἀριθμὸς ἐστὶν ὁ ὑπὸ ἀρτίου ἀριθμοῦ μετρούμενος κατὰ ἄρτιον ἀριθμόν».

Παράδειγμα. $8 : 4 = 2$. Ὁ 8 εἶναι ἀρτιάκις ἄρτιος ἀριθμὸς, διότι μετρεῖται ὑπὸ τοῦ ἀρτίου ἀριθμοῦ 4 κατὰ τὸν ἄρτιον ἀριθμόν 2.

Ὅρισμὸς 9. «Ἀρτιάκις δὲ περισσός ἐστὶν ὁ ὑπὸ ἀρτίου ἀριθμοῦ μετρούμενος κατὰ περισσὸν ἀριθμόν».

Παράδειγμα. $20 : 4 = 5$. Ὁ 20 εἶναι ἀρτιάκις περισσὸς ἀριθμὸς, διότι μετρεῖται ὑπὸ τοῦ ἀρτίου ἀριθμοῦ 4 κατὰ τὸν περιττὸν ἀριθμόν 5.

7. Eva Sachs, Die fünf platonischen körper, Berlin 1917, S. 38, (von dem unzuverlässigen und unwahren Iamblichos stammt).

8. Pistelli, 20, 7. 20, 21, 23, 18 ἕως 24, 6.

[^οΟρισμός 10. «Περισσάκις ἄρτιός ἐστιν ὁ ὑπὸ περισσοῦ ἀριθμοῦ μετρούμενος κατὰ ἄρτιον ἀριθμόν.»]

Παράδειγμα. $20 : 5 = 4$. Ὁ 20 ἔδῳ εἶναι περισσάρτιος ἀριθμός, διότι μετρεῖται ὑπὸ τοῦ περιττοῦ ἀριθμοῦ 5 κατὰ τὸν ἄρτιον ἀριθμόν 4.

^οΟρισμός 11. «Περισσάκις δὲ περισσός ἀριθμός ἐστιν ὁ ὑπὸ περισσοῦ ἀριθμοῦ μετρούμενος κατὰ περισσὸν ἀριθμόν.»

Παράδειγμα. $33 : 3 = 11$. Ὁ 33 εἶναι περισσάκις περιττός, διότι μετρεῖται (περιττός ὢν) ὑπὸ τοῦ περιττοῦ ἀριθμοῦ 3 κατὰ τὸν περιττὸν ἀριθμόν 11.

ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ βιβλίον 9, Θεώρημα 33.

Ἐὰν ἀριθμὸς τὸν ἡμισὺν ἔχη περιττόν, ἀρτιάκις περισσός ἐστὶ μόνον.

Παράδειγμα. $10 : 2 = 5$. Ὁ 10 εἶναι ἀρτιάκις περιττός μόνον.

ΣΤΟΙΧΕΩΝ βιβλίον 9, Θεώρημα 34.

Ἐὰν ἀριθμὸς μήτε τῶν ἀπὸ δυάδος διπλασιαζομένων ἢ μήτε τὸν ἡμισὺν ἔχη περισσόν, ἀρτιάκις τε ἄρτιός ἐστὶ καὶ ἀρτιάκις περισσός. κ

Παράδειγμα. Ὁ ἀριθμὸς θὰ εἶναι τῆς μορφῆς $2(2\nu + 1)$, ὅπου $\kappa \equiv 2$ καὶ $\nu = 1, 2, 3 \dots$. Ἐὰν $\kappa = 2$ ὁ ἀριθμὸς θὰ εἶναι $2 \cdot 2(2\nu + 1)$, ὁπότε $2 \cdot 2(2\nu + 1) : 2 = 2(2\nu + 1)$ καὶ ὁ $2 \cdot 2(2\nu + 1)$ εἶναι ἀρτιάκις ἄρτιος, ἢ $2 \cdot 2(2\nu + 1) : 2 \cdot 2 = (2\nu + 1)$, ὁπότε οὗτος εἶναι ἀρτιάκις περιττός.

Ἄλλην ἀνακρίβειαν τοῦ Ἰαμβλίχου παρατηροῦμεν εἰς τὰ σχόλια αὐτοῦ περὶ τῶν τελείων ἀριθμῶν, ὅπου γράφει ὅτι μεθ' ἐκάστην δεκάδα ἢ μυριάδα ἀπαντᾷ εἰς τέλειος ἀριθμὸς ⁹. Λόγου χάριν :

Ἀπὸ 1 — 10 ἀπαντᾷ εἰς τέλειος ἀριθμὸς, ὁ 6.

» 11 — 100 » » » ὁ 28.

» 101 — 1000 » » » ὁ 496.

» 1001 — 10.000 » » » ὁ 8128.

Πέραν ὅμως τοῦ ἀριθμοῦ 10.000 δὲν ἰσχύει ὁ νόμος αὐτός.

Ἄλλὰ καὶ ἡ πληροφία τοῦ Ἰαμβλίχου διὰ τὴν ἀνακάλυψιν τῆς μουσικῆς ἀναλογίας $6 : 8 = 9 : 12$ φαίνεται, ὅτι δὲν εἶναι ἀκριβής· διότι γράφει : «Τὰ νῦν δὲ περὶ τῆς τελειοτάτης ἀναλογίας ῥητέον ἐν τέτταρσιν ὄροις ὑπαρχούσης καὶ ἰδίως μουσικῆς ἐπικληθείσης εὕρημα δ' αὐτὴν φασιν εἶναι Βαβυλωνίων καὶ διὰ Πυθαγόρου πρώτου εἰς Ἑλληνας ἔλθειν ¹⁰. (Τώρα δὲ θὰ ὀμιλήσωμεν περὶ τῆς τελειοτάτης ἀναλογίας τῆς ὀνομασθείσης μουσικῆς . . . λέγουσιν δὲ ὅτι αὕτη εἶναι ἀνακάλυψις τῶν Βαβυλωνίων καὶ διὰ τοῦ Πυθαγόρου πρώτου μετεφέρθη εἰς τοὺς Ἑλληνας). Ὅτι ἡ πληροφία αὕτη δὲν εἶναι ἀκριβής τὸ συνάγομεν ἐκ τῆς Ἀριθμητικῆς Εἰσαγωγῆς τοῦ Νικομάχου, τὴν ὁποίαν σχολιάζει ὁ Ἰάμβλιχος. Ὁ Νικόμαχος, ἀφοῦ τελειώνει τὴν ἐκθεσὶν του περὶ τῶν δέκα ἀναλογιῶν, γράφει σχετικῶς : «29. Λοιπὸν καὶ περὶ τῆς τελειοτάτης καὶ τριχῆ διαστατῆς πασῶν τε περιεκτι-

9. Pistelli 33, 15.

10. Pistell 118 19.